Фазода текислик тенгламалари

1. Фазода Декарт координатлар системаси ва асосий масалалар.

Текисликдаги Декарт координатларига ўхшаш фазодаги координатлар ҳам аниқланади, ўзаро перпендикуляр OX, OY, OZ сон ўқлари, умумий 0 нуқтадан ўтсин. Фазода A ***нуқтага учта ҳақиқий сон*** (x, y, z) ва аксинча учта ҳақиқий сонга битта нуқта мос келади. Бу мослик ҳам бир қийматлидир. Бу сонларга нуқтанинг фазодаги координатлари дейилади. x абциссаси, y ординатаси, z ***апликатаси*** деб аталади. Координат ўқларидан ўтувчи текисликларга ***координат текисликлари*** дейилади ва улар фазони 8 та бўлакларга - **октантларга** ажратади. $A\,(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг координатлари OA радиус векторнинг ҳам координатлари бўлади.

Фазодаги аналитик геометрияда ҳам қуйидаги содда масалалар қаралади:

1) фазодаги берилган $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $B\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофа,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формула билан аниқланади;

2) AB кесмани $\lambda = AC : CB$ нисбатда бўлувчи $C\,(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг координатлари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

формулалар ёрдамида топилади.

2. Фазода сирт ва унинг тенгламаси. Маълумки, текисликда

$$F\ (x,\ y) = 0$$

тенглама бирор чизиқни ифодалайди.

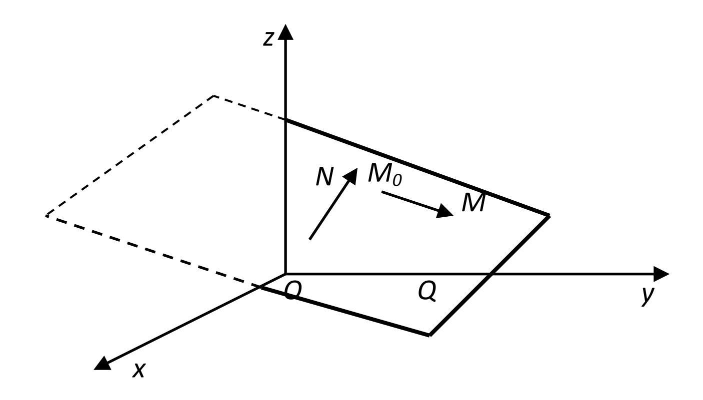
$$F\ (x,\ y,\ z) = 0 \qquad (1)$$

тенглама $OXYZ$, R^3 фазода координатлари (1) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами, бирор ***сиртни аниқлайди***. Бу тенгламага ***сирт тенгламаси*** дейилади. (1) тенглама даражасига ***сиртнинг тартиби*** деб аталади. Масалан, OYZ координат текислигида ётган исталган $A(x,\ y,\ z)$ нуқтанинг абсциссаси $x=0$ бўлади ва аксинча $A\,(0,\ y,\ z)$ нуқта OYZ координат текислигида ётади. Демак, OYZ координат текислигининг тенгламаси $x=0$ бўлиб, у биринчи тартибли бўлади. Худди, юқоридагидек $y=0$, $z=0$ мос равишда OXZ ва OXY координат текисликлари тенгламаларини ифодалайди.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R$$

тенглама маркази $C\,(a,\ b,\ c)$ нуқтада радиуси R бўлган сферик сирт тенгламаси иккинчи тартиблидир.

3. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси. $OXYZ$ тўғри бурчакли координатлар системасида $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқта ва $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ вектор берилган бўлсин. M_0 нуқтадан ўтувчи, $\vec{N}$ векторга перпендикуляр Q текисликнинг фазодаги вазияти аниқ бўлади. Унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Q текисликда ихтиёрий $M\,(x,\ y,\ z)$ нуқта оламиз(1-чизма).



1-чизма.

$\overrightarrow{M_0M}$ ва $\overrightarrow{N}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда ва фақат шундагина M нуқта Q текисликда ётади. Маълумки $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг координатлари $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ бўлади. Икки векторнинг перпендикулярлик шартига асосан:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (2)$$

бўлади. Бу Q ***текислик тенгламаси*** бўлади.

Таъриф. Q текисликка перпендикуляр $\overrightarrow{N}=A\,\overrightarrow{i}+B\,\overrightarrow{j}+C\,\overrightarrow{k}$ векторга бу текисликнинг ***нормал*** вектори дейилади.

1-мисол. $M_0\ (4,\,-3,\,5)$ нуқтадан ўтиб, $\overrightarrow{N}=2\,\overrightarrow{i}-3\,\overrightarrow{j}+4\,\overrightarrow{k}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (2) формулага асосан,

$2(x-4)+(-3)\ (y+3)+4(z-5)=0,\ 2x-8-3y-9+4z-20=0$

ёки

$2x-3y+4z-37=0$

бўлиб, бу изланаётган текислик тенгламасидир.

4. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий ҳоллари.

(2) тенгламадан

$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$ ёки $Ax_0-By_0-Cz_0=D$

билан белгилашдан кейин

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (3) тенгламага фазода текисликнинг ***умумий тенгламаси*** дейилади.

Умумий тенгламанинг хусусий ҳолларини қараймиз:

1) $D=0$ бўлса, $Ax+By+Cz=0$ бўлиб, текислик координатлар бошидан ўтади;

2) $C=0$ бўлса, $Ax+By+D=0$ бўлиб, текислик OZ ўқига параллел; худди шундай $Ax+Cz+D=0$, $By+Cz+D=0$ текисликлар мос равишда OY ва OX ўқларига параллелдир;

3) 2-ҳолда $D=0$ бўлса, текислик тенгламалари $Ax+By=0$, $Ax+Cz=0$, $By+Cz=0$бўлиб, улар мос равишда OZ, OY, OX координат ўқларидан ўтади;

4) $B=C=0$, бўлса, $Ax+D=0$ текислик YOZ координат текислигига параллел, худди шундай $By+D=0$, $Cz+D=0$ текисликлар мос равишда XOZ, XOY координат текисликларига параллел бўлади;

5) $B=C=D=0$ бўлса, $Ax=0$ бўлиб, YOZ координат текислиги билан устма-уст тушади, яъни $x=0$, YOZ координат текислигининг тенгламаси бўлади. Худди шундай $y=0$ ва $z=0$, мос равишда XOZ ва XOY координат текисликларининг тенгламасини ифодалайди .

5. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси. (3) тенгламада A, B, C, D коэффициентлар ҳаммаси 0 дан фарқли бўлса, текислик координат ўқларидан OL, ON ва OP кесмалар ажратади(2-чизма). (3) тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$Ax+By+Cz=D, \qquad \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1.$$

Охирги тенгламада

$-D/A=a$, $-D/B=b$, $-D/C=c$

белгилаш критсак,

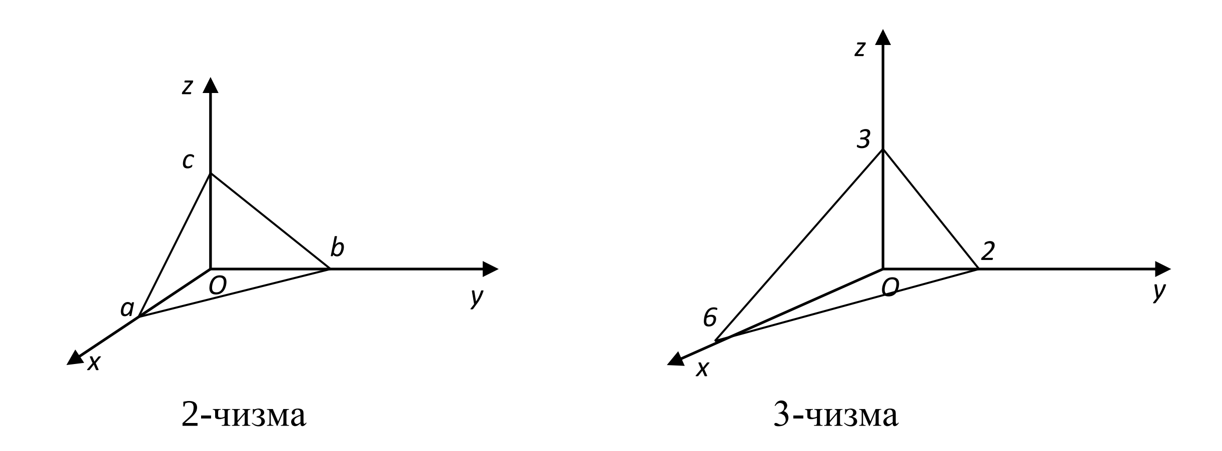
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенгламага фазода ***текисликнинг кесмаларга нисбатан*** тенгламаси дейилади.

2-мисол. Текисликнинг $x+3y+2z-6=0$ умумий тенгламаси берилган, бу текисликни ясанг.

Ечиш. Тенгламани текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламасига келтирамиз:

$$x+3y+2z=6, \qquad \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$



2-чизма 3-чизма

Охирги тенгламадан маълумки, текислик координат ўқларидан мос равишда 6, 2, 3 кесмалар ажратади. Бу кесмаларнинг охиридан текисликни ўтказамиз (3-чизма).

6. Берилган учта $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ **ва** $C(x_3;\, y_3;\, z)$ **нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

кўринишда бўлиб, учта векторнинг компланарлигидан келиб чиқади. $M(x,\ y,\ z)$ текисликдаги ихтиёрий нуқта. $\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ векторлар компланардир.

7. Икки текислик орасидаги бурчак. Нуқтадан текисликкача масофа.

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

текисликлар орасидаги бурчак уларнинг нормал $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлиб,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5)$$

формула њринли бњлади. (5) га иккита текислик орасидаги бурчак косинусини топиш формуласи дейилади.

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар коллинеар бўлса,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

бўлиб***, бу икки текисликнинг параллеллик шарти дейилади.***.

$\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлар перпендикуляр бўлса,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

бўлиб, *бу икки текисликнинг перпендикулярлик шарти* бўлади. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликкача бўлган масофа

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

формула билан топилади.

3-мисол. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ва $2x + 3y + z + 8 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $n_1\ (1,\ 2,\ -3)$ ва $n_2\ (2,\ 3,\ 1)$ мос равишда берилган текисликларнинг нормал векторлари бўлганлиги учун (5) формулага асосан,

$$\cos\varphi \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\ \cdot\ \sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{5}{14}, \qquad \varphi \approx 69^0 05^1$$

бўлади.

4-мисол. $2x-y-2z+4=0$ ва $2x-y-2z-8=0$ текисликларнинг параллеллигини кўрсатинг ва улар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Берилган текисликларнинг нормал векторлари $n_1\ (2,\ -1,\ -2)$ ва $n_2\ (2,\ -1,\ -2)$ параллеллик шартини қаноатлантиради, демак берилган текисликлар ҳам параллелдир. Энди биринчи текисликда бирор нуқтани аниқлаб ундан иккинчи текисликкача бўлган масофани топамиз. $x=z=0$ бўлса, биринчи текислик тенгламасидан $y=4$ бўлиб, $M_0\ (0;\ 4;\ 0)$ нуқта биринчи текисликдаги нуқта бўлади. (6) формулага асосан,

$$d = \frac{|2\cdot 0-1\cdot 4-2\cdot 0-8|}{\pm\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Демак, параллел текисликлар орасидаги масофа $d=4$ бўлади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. R^3 фазода нуқтанинг ўрни қандай аниқланади?
2. Қандай мосликка бир қийматли мослик дейилади?
3. R^3 фазодаги координатлар қандай аниқланади?
4. Координат текисликлари нима?
5. Координат текисликлари R^3 фазони нечта бўлакка ажратади?
6. R^3 фазода икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
7. R^3 фазода сирт ва унинг тенгламаси қандай аниқланади?
8. Сиртнинг тартиби деб нимага айтилади?
9. Сферик сирт нечанчи тартибли?

10. Берилган нуқтадан ўтиб ва берилган векторга перпендикуляр текислик тенгламаси қандай бўлади?

11. Қандай векторга текисликнинг нормал вектори дейилади?

12. Текисликнинг умумий тенгламаси ва унинг хусусий холлари қандай бўлади?

13. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси қандай ёзилади?

14. Берилган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси детерминант орқали қандай бўлади?

15. Иккита текислик орасидаги бурчак қандай топилади?

16. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа нима ва у қандай топилади?

17. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нима?

Мустақил бажариш учун топшириљлар

1. $A(2, 5, 0)$ ва $B(5, 1, 12)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

2. Учлари $A(5, 2, 6)$, $B(6, 4, 4)$, $C(4, 3, 2)$ ва $D(3, 1, 4)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини кўрсатинг.

3. $A(3, 7, 4)$ ва $B(8, 2, 3)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани $\lambda = 2:3$ нисбатда бўлувчи $C(x, y, z)$ нуқтани топинг.

4. AB кесманинг бошланғич нуқтаси $A(-1, 2, 4)$ ва уни $\lambda = 1:2$ нисбатда бўлувчи $C\ (2, 0, 2)$ нуқта берилган. $B\ (x, y, z)$ нуқтани топинг.

5. Учлари $A(5, 3, -10)$, $B(0, 1, 4)$ ва $C(-1, 3, 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг AE медианасининг узунлигини топинг.

6. $A(3, 6, -5)$ ва $B(1, -1, 2)$ нуқталарга параллел йњналган F_1 ва F_2 кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси F қўйилган $N(x, y, z)$ нуқтани топинг. $|F_1| = 5H$ ва $|F_2| = 2H$. Кўрсатма: Физикадан маълумки параллел кучларни қўшганда AN ва NB елкалар унга қўйилган кучларга тескари пропорцианалдир, яъни $AN : NB = |F_2| : |F_1| = 2:5 = \lambda$ бўлади.

7. $M_1\ (4,\ 2,\ -6)$ ва $M_2\ (2,\ -2,\ 4)$ нуқталарга P_1 ва P_2 параллел кучлар қўйилган. $|P_1| = 2$, $|P_2| = 6$ бўлса тенг таъсир этувчи P кучнинг қўйилган нуқтасини топинг.

8. $M(2;\ -3;\ 2)$ нуқтадан ўтиб, $N(5,\ 4,\ 3)$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

9. $M_0(2;\ 5;\ 4)$ нуқтадан ўтиб, ордината ўқидан $b = -6$, апликата ўқидан $c = 3$ кесма ажратиб ўтган текислик тенгламасини ёзинг.

10. OX ўқига параллел ва $P(4;\ 0;\ -2)$, $Q(5,\ 1,\ 7)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.